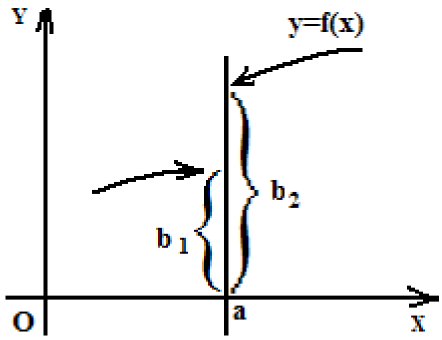
7 практикалық сабақ
Функция үзіліссіздігі

Функцияның нүктедегі және аралықтағы үзіліссіздігі. $y = f(x)$ функциясы берілсін. $x_0 \in X$ - анықталу облысы болсын.

Егер x айнымалы a-дан кіші мәндер қабылдап a санына ұмтылғанда $f(x)$ функциясы $в_1$-ге ұмтылса, онда былай белгіленеді: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = в_1$ және $в_1$ -ді $f(x)$ функциясының a нүктесіндегі *сол жақ шегі* деп атайды.

Егер x айнымалы a санынан тек үлкен мәндер қабылдап a-ға ұмтылса, онда былай белгіленеді $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = в_2$ және $в_2$-ні $f(x)$ функциясының a нүктесіндегі *оң жақ шегі* деп атайды (1.3 Сурет).



1.3 Сурет

Егер

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

болса, онда $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде *үзіліссіз функция* деп аталады.

Бұл анықтама мынадай үш шарттың орындалуымен мәндес деп саналады:

а) x_0 нүктесі өзінің қандай да бір маңайымен қоса X анықталу облысына тиісті болады;

ә) x_0 нүктесінде функцияның бір жақты шектері бар болады және олар өзара тең, яғни

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x);$$

б) функциясының бір жақты шектері оның осы x_0 нүктедегі мәніне тең болады:

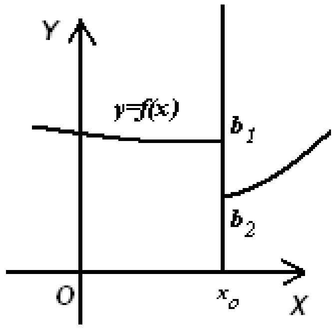
$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$$

Егер f функциясы қандай да бір аралықтың әрбір нүктесінде үзіліссіз болса, онда ол сол *аралықта үзіліссіз функция* деп аталады.

Егер $f_1(x)$ және $f_2(x)$ функциялары x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда осы нүктеде мына функциялар да $f_1(x) \pm f_2(x), f_1(x) \cdot f_2(x), \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}, f_2(x) \neq 0$ үзіліссіз болады.

Үзіліс нүктелері және олардың түрлері. Функцияның үзіліссіздік шарттарының кемінде біреуі орындалмайтын нүктелері оның *үзіліс нүктелері* деп аталады.

Ү з і л і с т ү р л е р і. 1) Егер x_0 нүктесінде f функциясының сол жақ және оң жақ шектері бар болып, бірақ олар бір-біріне тең болмаса, немесе олар бір-біріне тең, бірақ олар x_0 нүктесіндегі функцияның мәніне тең емес (немесе $f(x_0)$ анықталмаған болса), онда x_0 нүктесі f функциясының *бірінші текті үзіліс нүктесі* деп аталады.

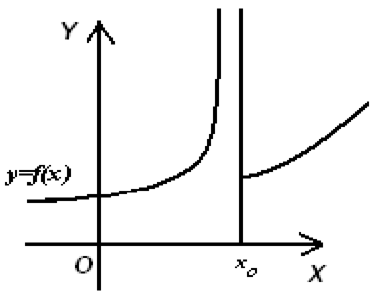


1.4 Сурет

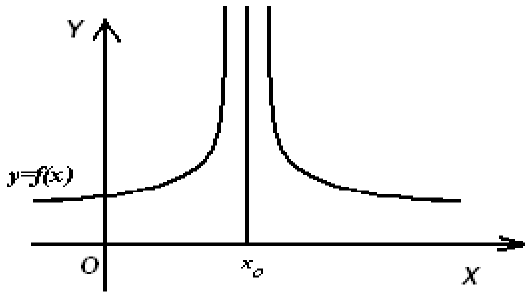
$f(x_0-0)=в_1,\ f(x_0+0)=в_2,\ f(x_0+0)-f(x_0-0)=в_2-в_1<\infty.$

$в_1 \neq в_2$. Ендеше x_0 нүктесінде 1-ші текті үзіліс (1.4 Сурет);

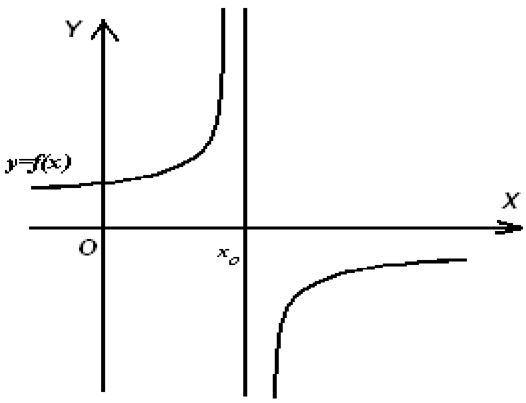
2) Егер x_0 нүктесінде алынған f функциясының бір жақты шектерінің кемінде бірі шексіз болып, не тіпті ол болмаса, онда x_0 нүктесі f функциясының *екінші текті үзіліс нүктесі* деп аталады (1.5 - 1.7 Суреттер).



1.5 Сурет



1.6 Сурет



1.7 Сурет

3) Егер x_0 нүктесінде f функциясының шегі бар (яғни сол жақ және оң жақ шектері бір-біріне тең) болса, бірақ ол x_0 нүктесіндегі функцияның мәніне тең емес (немесе $f(x_0)$ анықталмаған) болса, онда x_0 нүктесі f функциясының *жөнделетін үзіліс нүктесі* деп аталады.

205. $f(x)=e^{\frac{1}{x-a}}$ функциясының $x\to a$-да біржақты шектерін табу керек.

Шешуі: Егер $x\to a-0$ болса, онда $\frac{1}{x-a}=\frac{1}{-0}=-\infty.$ Сонымен,

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a-0} e^{\frac{1}{x-a}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

Егер $x\to a+0$ болса, онда $\frac{1}{x-a}=\frac{1}{+0}=+\infty.$

Сонымен, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} e^{\frac{1}{x-a}}=e^{+\infty}=+\infty.$ ▲

206. $f(x)=\dfrac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}$ функциясының $x\to 3$ -да біржақты шектерін табу керек.

Шешуі: Егер $x\to 3-0$ болса, онда $\frac{1}{x-3}\to-\infty$ және $2^{\frac{1}{x-3}}=2^{-\infty}=\frac{1}{2^{+\infty}}=\frac{1}{\infty}\to 0.$

Сонымен, $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}=\dfrac{1}{3+0}=\dfrac{1}{3}.$

Сол сияқты, $x\to 3+0$ болса, онда $\frac{1}{x-3}\to+\infty$ және $2^{\frac{1}{x-3}}=2^{+\infty}\to\infty.$ Сонымен,

$$\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3+0}\frac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}=\frac{1}{3+\infty}=\frac{1}{\infty}=0.\ ▲$$